MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 3
6.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin x \cdot \cos y,$$

ist, wie man sofort sieht, zweimal stetig partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(\cos x \cdot \cos y\,,\ -\sin x \cdot \sin y\big)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot \cos y & -\cos x \cdot \sin y \\ -\cos x \cdot \sin y & -\sin x \cdot \cos y \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \quad &\iff \quad \cos x \cdot \cos y = 0 \quad \wedge \quad -\cos x \cdot \sin y = 0 \\
&\iff \quad (\cos x = 0 \ \vee\ \cos y = 0) \ \wedge\ (\sin x = 0 \ \vee\ \sin y = 0) \\
&\iff \quad \underbrace{(\cos x = 0 \ \wedge\ \sin x = 0)}_{\text{nicht möglich}} \ \vee\ (\cos x = 0 \ \wedge\ \sin y = 0) \\
&\qquad \vee\ (\cos y = 0 \ \wedge\ \sin x = 0) \ \vee\ \underbrace{(\cos y = 0 \ \wedge\ \sin y = 0)}_{\text{nicht möglich}} \\
&\iff \quad (\cos x = 0 \ \wedge\ \sin y = 0) \ \vee\ (\cos y = 0 \ \wedge\ \sin x = 0) \\
&\iff \quad (x,y) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \ell\pi\right) \ k,\ell \in \mathbb{Z} \quad \vee \\
&\qquad\quad (x,y) = \left(\ell\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ k,\ell \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dies sind alle kritischen Punkte, und damit alle Kandidaten für lokale Extremstellen von f.

i) Zu $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \ell\pi\right)\ k,\ell \in \mathbb{Z}$: Hier ist

$$\cos x = 0, \quad \sin y = 0, \quad \text{und} \quad \sin x = \begin{cases} 1\,, & k \text{ gerade} \\ -1\,, & k \text{ ungerade} \end{cases}, \cos y = \begin{cases} 1\,, & \ell \text{ gerade} \\ -1\,, & \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin x \cdot \cos y & 0 \\ 0 & -\sin x \cdot \cos y \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & k,\ell \text{ gerade} \quad \text{oder} \quad k,\ell \text{ ungerade} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \text{ gerade}, \ell \text{ ungerade} \quad \text{oder umgekehrt.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Im 1. Fall, also $k,\ell \in \mathbb{Z}$ beide gerade oder beide ungerade, ist die Hessematrix **negativ definit**, also hat f in $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \ell\pi\right)$ ein lokales **Maximum**;
Im 2. Fall, also $k,\ell \in \mathbb{Z}$, genau eines ist gerade, das andere ungerade, ist die Hessematrix **positiv definit**, also hat f in $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \ell\pi\right)$ ein lokales **Minimum**;

ii) Zu $(x,y) = \big(\ell\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\big)\ \ k,\ell \in \mathbb{Z}$: Hier ist

$$\cos y = 0, \quad \sin x = 0, \quad \text{also ist} \quad \sin y \neq 0 \quad \text{und} \quad \cos x \neq 0.$$

Damit ist

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos x \cdot \sin y \\ -\cos x \cdot \sin y & 0 \end{pmatrix},$$

also ist

$$\det \operatorname{Hess} f(x,y) = -\cos^2 x \cdot \sin^2 y < 0.$$

Damit ist die Hessematrix in diesen Punkten **indefinit**, und f hat in $\big(\ell\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\big),\ \ k,\ell \in \mathbb{Z}$, **kein** lokales Extremum (sondern einen Sattelpunkt).

Das Bild auf der letzten Seite zeigt den Graphen von f auf dem Quadrat $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$; man erkannt z.B. Maxima in den Punkten $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},2\pi)$, $(\frac{3\pi}{2},\pi)$ sowie Minima in $(\frac{\pi}{2},\pi)$, $(\frac{3\pi}{2},0)$, $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, und auch Sattelpunkte etwa in $(\pi,\frac{\pi}{2})$, $(\pi,\frac{3\pi}{2})$.

2. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{xy} + x^2 + y^2,$$

ist als Summe und Komposition der Exponentialfunktion und quadratischer Funktionen beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_x f(x,y) = e^{xy} \cdot y + 2\,x \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) = e^{xy} \cdot x + 2\,y,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(e^{xy}\,y + 2\,x,\ e^{xy}\,x + 2\,y\right),$$

sowie

$$\partial_x\partial_x f(x,y) = e^{xy} \cdot y^2 + 2 \qquad \text{und} \qquad \partial_y\partial_y f(x,y) = e^{xy} \cdot x^2 + 2$$

und unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) = (e^{xy} \cdot x) \cdot y + e^{xy} \cdot 1 = e^{xy}\,(xy+1)\,,$$

also

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy}\,y^2 + 2 & e^{xy}\,(xy+1) \\ e^{xy}\,(xy+1) & e^{xy}\,x^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^{xy}\,y + 2x = 0 \\ e^{xy}\,x + 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} e^{xy}\,yx + 2x^2 = 0 \\ e^{xy}\,xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$$
$$\implies 2x^2 = 2y^2 \iff x^2 = y^2$$
$$\implies y = x \ \vee \ y = -x.$$

$*$ Falls $y = x$, ist $xe^{x^2} + 2x = 0 \implies x\big(\underbrace{e^{x^2} + 2}_{>0}\big) = 0 \implies x = 0 \implies y = 0$, und

$*$ Falls $y = -x$, ist $-xe^{-x^2} + 2x = 0 \implies x\big(\underbrace{-e^{-x^2} + 2}_{>0}\big) = 0 \implies x = 0 \implies y = 0$

Damit ist $(0,0)$ der einzige Kandidat für einen kritischen Punkt, und wegen $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$ ist dies auch einer. Damit hat f nur einen kritischen Punkt, nämlich $(0,0)$. ✓

b) Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

und es ist $\det(\operatorname{Hess} f(0,0)) = 3 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(0,0) = 2 > 0$, also besitzt f nach Satz 1.13 in $(0,0)$ ein (strenges) lokales **Minimum** [$\operatorname{Hess} f(0,0)$ ist **positiv definit**].

3. a) Die Funktion f ist als Polynomfunktion in den Variablen x und y offensichtlich partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) = (48x^3 - 14xy,\ -7x^2 + 2y) &= (0,0) \\ \iff\ & x \cdot (48x^2 - 14y) = 0 \ \wedge\ -7x^2 + 2y = 0 \\ \iff\ & \underbrace{\big(x = 0 \ \wedge\ -7x^2 + 2y = 0\big)}_{(1)} \ \vee\ \underbrace{\big(48x^2 - 14y = 0 \ \wedge\ -7x^2 + 2y = 0\big)}_{(2)} \end{aligned}$$

Es ist $\quad (1) \iff (x,y) = (0,0)$, und

$$(2) \iff 48x^2 - 14y = 0 \ \wedge\ -49x^2 + 14y = 0$$

$$\implies -x^2 = 0 \implies x = 0 \overset{(2)}{\implies} y = 0 \quad \text{und es ist } \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0).$$

Also ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von f.

b) Es ist $f(0,0) = 0$.
Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x, ax^2) = 12x^4 - 7x^2ax^2 + a^2x^4 = x^4(12 - 7a + a^2) = x^4 \cdot (a-3) \cdot (a-4).$$

Damit ist z.B. für $a = 5$

$$f(x, 5x^2) = x^4 \cdot 2 \cdot 1 = 2x^4 > 0, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Außerdem ist z.B. für $a = 3.5$

$$f(x, 3.5\,x^2) = x^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}x^4 < 0, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Damit liegen für alle $r > 0$ in der Kreisscheibe $K_r(0,0)$ Punkte (x,y) mit $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ [z.B. $(x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{5}{n^2})$ für $n \in \mathbb{N}$ groß genug] <u>und</u> Punkte (x,y) mit $f(x,y) < 0 = f(0,0)$ [z.B. $(x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{3.5}{n^2})$ für $n \in \mathbb{N}$ groß genug].
Also hat f **kein** lokales Extremum in $(0,0)$.

4. Angenommen, es gibt eine solche Funktion f. Dann sind die angegebenen Funktionen

$$\partial_1 f, \partial_2 f\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

wiederum partiell differenzierbar (also f zweimal partiell differenzierbar) mit

$$\operatorname{Hess}\ f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin x_2 & \cos x_2 \\ x_1 \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Man sieht sofort, daß die 2. partiellen Ableitungen

$$\partial_1\partial_1 f, \partial_2\partial_1 f, \partial_1\partial_2 f, \partial_2\partial_2 f\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig sind, also ist f zweimal stetig partiell differenzierbar.
Nach dem Satz von Schwarz müßte dann aber $\operatorname{Hess}\ f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ symmetrisch

sein, was wegen $x_1 \cos x_2 \neq \cos x_2$ für z.B. $(x_1, x_2) = (0, 0)$ nicht der Fall ist.
Also gibt es keine partiell differenzierbare Funktion f mit

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = (x_1 \sin x_2\,,\, x_1 \cos x_2) \quad \text{für alle} \;\; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zu Aufgabe 1: